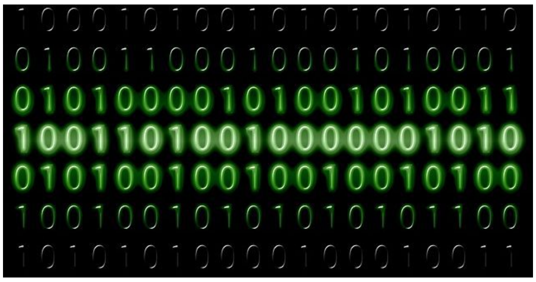
Chapitre 1 : Systèmes de Numération et Codage des Nombres

Institut des Sciences et Techniques Appliquées (ISTA) UFMC1



ASSABAA Mohamed

Avril 2018
1.0

Table des matières

Objectifs

À l'issue de ce cours l'apprenant sera capable de :

- Faire une conversation entre les différentes bases.
- Traiter des opérations arithmétiques et faire des calculs dans des bases appropriées.
- Faire le codage des entiers naturels et des entiers signés en complément à 2
- Connaître différents systèmes de codage

Pré-requis :

- Mathématique

Introduction

Pour qu'une information numérique soit traitée par un circuit, elle doit être mise sous forme adaptée à celui-ci. Pour cela Il faut choisir un système de numération de base B (B un nombre entier naturel >= 2). De nombreux systèmes de numération sont utilisés en technologie numérique. Les plus utilisés sont les systèmes : Décimal (base 10), Binaire (base 2), Octal (base 8) et Hexadécimal (base 16).

De manière générale l'expression d'un nombre en base B est de la forme:

$(N)_B = a_n\, a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-m}$ ....(1)

où chaque coefficient a_i est un chiffre dont sa valeur comprise entre 0 et (B-1)

Tout nombre N peut se décomposer en fonction des puissances entières de la base de son système de numération. Cette décomposition s'appelle la forme polynomiale du nombre N et qui est donnée par :

$(N)_B = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \ldots + a_1 B^1 + a_0 + a_{-1} B^{-1} + \ldots a_{-m} B^{-m}$ ....(2)

Systèmes de Numération

I

1. Système Décimal

C'est le système de numération usuel dans la vie quotidienne. Dans ce système , tout nombre N est exprimé à partir des dix chiffres : 0, 1, 2, ..., 9. On dit alors que la base de numération est B=10.

Exemple :

Le nombre 1356,724 correspond à :

1356,724=1000+300+50+6+0.7+0.02+0.004

$1356{,}724=10^3+3*10^2+5*10^1+6*10^0+7*10^{-1}+2*10^{-2}+4*10^{-3}$

Alors: $(1356{,}724)_{10}=1*B^3+3*B^2+5*B^1+6*B^0+7*B^{-1}+2*B^{-2}+4*B^{-3}$

avec B=10.

1.1. Conversion du système Décimal vers une base quelconque

Pour convertir un nombre de la base 10 vers une base B quelconques, il faut faire des divisions successives par B et retenir à chaque fois le reste jusqu'à l'obtention à un quotient inférieur à la base B, dans ce cas le nombre s'écrit de la gauche vers la droite en commençant par le dernier quotient allant jusqu'au premier reste.

2. Système Binaire

Dans ce système de numération, tous les nombres sont exprimés à l'aide des chiffres 0 et 1, ces deux chiffres sont appelés bits (contraction de *BI*nary digi*T*).

Pour le système Binaire la base de numération est B=2.

les coefficients : a_i : 0, B-1 $\rightarrow$0,1

Cette base est très pratique en électronique numérique pour distinguer deux états logiques. On écrit :

$(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_0)_2=a_n\ 2^n+a_{n-1}\ 2^{n-1}+\ ...\ +a_1\ 2^1+a_0\ 2^0$

La partie droite de l'équation donne la valeur en décimal du nombre binaire écrit à gauche.

- a_0 : Le bit le plus à droite est le bit de poids le plus faible ou bien le moins significatif (*LSB* : *L*ow *S* ignificant *B*it).
- a_n : Le bit le plus à gauche est le bit de poids le plus fort ou bien le plus significatif (*MSB* : *M*ost *S* ignificant *B*it)

Exemple:

$(1011,01)_2=1*2^3 +0* 2^2+1*2^1+1* 2^0+0*2^{-1}+1*2^{-2}$

Le passage du système binaire au système décimal s'appelle un décodage, et le passage du système décimal au système binaire s'appelle codage, de façon global :

Le passage d'un système *X* vers un système *Y* s'appelle un *transcodage*.

2.1. Conversion Binaire décimal

Pour convertir un nombre binaire en décimal, il suffit d'utiliser la relation (2) en posant B=2 :

$(N)_{10}=a_n B^n +a_{n-1} B^{n-1}+ ... +a_1 B^1+a_0+ a_{-1} B^{-1} + ... a_{-m} B^{-m}$

$(N)_{10}=a_n 2^n +a_{n-1} 2^{n-1}+ ... +a_1 2^1+a_0+ a_{-1} 2^{-1} + ... a_{-m} 2^{-m}$

Exemple :

Convertir en décimal le nombre binaire $(11010)_2$

$(11010)_2 =1*2^4+1*2^3+0*2^2+1*2^1+0*2^0$

$(11010)_2 =16+8+2$

$(11010)_2 =(26)_{10}$

$(110001,001)_2 =1*2^5+1*2^4+0*2^3+0*2^2+0*2^1+1*2^0+0*2^{-1}+0*2^{-2}+1*2^{-3}$

$(110001,001)_2 =32+16+1+0.125$

$(110001,001)_2 =(49,125)_{10}$

2.2. Exercice

[solution n°1 p.20*]*

Quelle est la valeur décimale qui correspond à la valeur binaire 110001 ?

Veuillez choisir une réponse :

- ○ 87
- ○ 49
- ○ 32

2.3. Conversion décimal binaire

2.3.1. Conversion de la partie entière d'un nombre

Méthode : Méthode des division successives

la méthode des divisions successives consiste à diviser successivement par 2, le nombre décimale à convertir jusqu'à ce que le résultat de la division soit un zéro. le nombre binaire correspondant sera la succession des restes obtenus. le bit de poids le plus élevé de ce nombre, étant le reste de la dernière division.

Exemple :

$(27)_{10}=(11011)_2$

27 :	2	=	13 :	2	=	6 :	2	=	3 :	2	=	1 :	2	=	0
	1			1			0			1			1		

le reste de la dernière division sera écrit le premier (sens de lecture).

Méthode : Méthode des soustractions successives

Pour utiliser cette méthode, on doit déterminer en premier lieu, les valeurs successives 2^i (i=0,...,n), on déterminera ensuite, entre quelles valeurs successives de 2^i se situe le nombre à convertir. La borne inférieure est alors soustraite au nombre. On procède de la même manière avec le reste obtenu, jusqu'à ce que l'on obtienne zéro comme reste de la soustraction.

la valeur binaire sera 1 à la position du poids utilisé dans la soustraction, et 0 à la position des poids non utilisés.

Remarque

Pour la conversion décimal vers un autre système de numération, le procédé est identique. On établit toujours en premier lieu les valeurs successives de B^i ; B étant la base de numération du système considéré.

Exemple

En utilisant la méthode des soustractions successives, convertir le nombre décimal $(230)_{10}$ en binaire :

De	230	On peut retirer	128	reste	102	**1**
De	102	On peut retirer	64	reste	38	**1**
De	38	On peut retirer	32	reste	6	**1**
De	6	On ne peut pas retirer	16	reste	6	**0**
De	6	On ne peut pas retirer	8	reste	6	**0**
De	6	On peut retirer	4	reste	2	**1**
De	2	On peut retirer	2	reste	0	**1**
De	0	On ne peut pas retirer	1	reste	0	**0**

Sens de lecture

Le résultat est donc : $(230)_{10} = (11100110)_2$

2.3.2. Conversion de la partie fractionnaire d'un nombre

On multiplie successivement par 2 la partie fractionnaire jusqu’à ce que l'on obtienne un nombre entier, on arrête les calculs. A chaque multiplication, on prend en compte que la partie entière obtenue.

Remarque

- Lorsque la multiplication successive par 2, ne donne pas 1 après plusieurs multiplication, on arrête les calculs.
- Pour la partie entière, on procède par divisions comme pour un entier.

Exemple

Soit à convertir le nombre $(462\,,625)_{10}$ vers une la base 2.Pour résoudre ce problème il faut procéder comme suit :

Convertir la partie entière (462)

Convertir la partie fractionnaire en faisant des multiplications successives par 2 et en conservant à chaque fois le chiffre devenant entier.

$(462{,}625)_{10}= (\ ?)_2$

$(462)_{10}=(111001110)_2$

0,625*2=1,25

0, 25*2= 0,5

0, 5*2= 1,0

Le résultat est donc : $(462,\ 625)_{10} =(111001110{,}101)_2$

$(12{,}15)_{10}= (\ ?)_2$

$(12)_{10}=(1100)_2$

0,1 5*2= 0,3

0 ,3*2=0,6

0 ,6*2=1,2

0 ,2*2=0,4

0 ,4*2=0,8

0 ,8*2=1,6

0 ,6*2=1,2

Le résultat est donc : $(12,\ 15)_{10} = (1100,\ 001001...)_2$

2.4. Exercice

[solution n°2 p.20*]*

Quelle est la valeur binaire qui correspond à la valeur décimale 12 ?

Veuillez choisir une réponse :

- ○ 1100
- ○ 1010
- ○ 0111

2.5. Autres conversions

Pour faire La conversion d'un nombre d'une base quelconque B_1 vers une autre base B_2 il faut passer par la base 10. Mais si la base B_1 et B_2 s'écrivent respectivement sous la forme d'une puissance de 2 on peut passer par la base 2 (binaire) :

- Base tétrale (base 4) : $4=2^2$ chaque chiffre tétral se convertit tout seul sur 2 bits.
- Base octale (base 8) : $8=2^3$ chaque chiffre octal se convertit tout seul sur 3 bits.
- Base hexadécimale (base 16) : $16=2^4$ chaque chiffre hexadécimal se convertit tout seul sur 4 bits.

Il existe donc une équivalence entre un nombre exprimé dans la base $B=2^n$ et un groupe de n bits d'un nombre exprimé dans la base 2. Pour la partie entière les bits seront regroupés de droite vers gauche, alors que pour pour la partie fractionnaire ils seront regroupés de gauche vers la droite.

Exemple :

$(1\ 1001\ 1101{,}1101\ 0011)_2=(19D{,}D3)_{16}$

$(1231)_4=(01\ 10\ 11\ 01)_2$

$(1231)_8=(001\ 010\ 011\ 001)_2$

3. Système Octal

Le système octal ou base 8 comprend huit chiffres qui sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Les chiffres 8 et 9 n'existent pas dans cette base (B=8).

Exemple:

Écrivons les nombres 45278 et 1274.6328 :

$(4527)_8= 4*8^3 + 5*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0$

$(1274.632)_8= 1*8^3 + 2*8^2 + 7*8^1 +4*8^0+ 6*8^{-1} + 3*8^{-2} + 2*8^{-3}$

4. Système Hexadécimal

L'utilisation de la base B =16 résulte du développement des micro-ordinateurs. Les symboles utilisés dans cette base sont les dix chiffres de 0 à 9 complétés par les lettres A (pour 10), B (pour 11), C (pour12), D (pour 13), E (pour 14) et F (pour 15).

Exemples :

$(4210)_{16}= 4*16^3 + 2*16^2 + 1*16^1 + 0*16^0$

$(2A4E)_{16}= 2*16^3 + 10*16^2 + 4*16^1 + 14*16^0$

$(C1B.D5)_{16}= 12*16^2 + 1*16^1 + 11*16^0 +13*16^{-1}+ 5*16^{-2}$

5. Exercice

[solution n°3 p.20*]*

Quelle est la valeur binaire qui correspond à la valeur Hexadécimale 8E5?

Veuillez choisir une réponse :

- 1100 1110 0010
- 1111 0101 0101
- 1000 1110 0101
- 1000 0110 1010

6. Exercice : Exercice :

Convertir en hexadécimal les nombres binaires suivants : 1101, 10100111 et 01001011.

Codage des nombres

II

1. Code binaire pur

Correspond à la conversion décimal binaire du nombre.

2. Code "8421"

Il permet de coder les nombres décimaux compris entre 0 et 15 : 16 combinaison.

Nombre décimal	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

3. Code BCD (Binary Coded Decimal)

Ce code conserve les avantages du système Décimal et du code binaire. Il est utilisé par les machines à calculer. le code *BCD* (*B*inary *C*oded *D*ecimal), consiste à représenter chaque chiffre d'un nombre décimal par son équivalent binaire sur 4 bits, on a alors :

Code décimal 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Code BCD 0000 0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111 1000 1001

Exemple :

$(19)_{10} = (00011001)_{BCD}$

$(421)_{10} = (0100\ 0010\ 0001)_{BCD}$

Remarque

- En code BCD un nombre de *n* chiffres occupe toujours *4n* bits.

- Les possibilités binaires de 10 à 15 ne sont pas utilisées.

4. Exercice

[*solution* n°4 p.21]

Quelle est la valeur décimale qui correspond à la valeur BCD : 1000 0110 0001?

Veuillez choisir une réponse :

- 861
- 876
- 754

5. Code Hexadécimal

Le système Hexadécimal ou base 16 contient seize éléments qui sont {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Les chiffres A, B, C, D, E, et représentent respectivement 10, 11, 12, 13, 14 et 15.

Exemple

$(D62C)_{16} = (13*16^3 + 6*16^2 + 2*16^1 + 12*16^0)_{10} = (54828)_{10}$

$(A2B,E1)_{16}= 10*16^2 + 2*16^1 + 11*16^0 +14*16^{-1}+ 1*16^{-2}=(2603,8789)_{10}$

$(468)_{10}=(1D4)_H$

468 :	16	=	29:	16	=	1:	16	=	0
	4			13			1		
	4			D			1		

Nombre Héxadécimal	Binaire			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

Les opérations arithmétiques

III

Les opérations arithmétiques s'effectuent en base quelconque B avec les mêmes méthodes qu'en base 10. Une retenue ou un report apparaît lorsque l'on atteint ou dépasse la valeur B de la base.

1. Addition

Il suffit de savoir que :

0+0=0

0+1=1

1+0=1

1+1=0 Retenue 1

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,1\,1 \\ +\quad \\ 1\,1\,1\,0\,1\,0 \\ \hline =\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\,1 \end{array}$$

en Hexadécimal :

$$\begin{array}{r} 1\,A \\ + \quad \\ C\,7 \\ \hline =E\,1 \end{array} \equiv \begin{array}{r} 0001\ 1010 \\ + \quad \\ 1100\ 0111 \\ \hline =\ 1110\ 0001 \end{array}$$

addition BCD :

Exemple 1 :

$$\begin{array}{r} 13 \\ + \quad \\ 26 \\ \hline =\ 39 \end{array} \equiv \begin{array}{r} 0001\ 0011 \\ + \quad \\ 0010\ 0110 \\ \hline =0011\ 1001 \end{array}$$

Exemple 2 :

```
  18          0001 1000
+           +
  29          0010 1001
-----       -----------
= 47        = 0100 0001
            +
                   0110
            -----------
            = 0100 0111
```

on corrige en ajoutant 6 au quartet >9

Exemple 3 :

```
  65          0110 0101
+           +
  68          0110 1000
-----       -----------
= 133       =  1100 1101
            +
               0110 0110
            -----------
            =1 0011 0011
```

2. Exercice

[solution n°5 p.21*]*

Quelle est le résultat de l'addition en binaire suivante :

11010+01011

Veuillez choisir une réponse :

- 110011
- 001011
- 100101

3. Soustraction

Il suffit de savoir que :

0-0=0

0-1=1 Report 1

1-0=1

1-1=0

Exemple :

10-9=+1

```
        1  0  1  0
  -
        1  0  0  1
------------------
=  0|   0  0  0  1
```

9-10=-1

```
        1  0  0  1
  -
        1  0  1  0
------------------   → (-1) (CP2)
=  1|   1  1  1  1
```

3.1. Soustraction en complément à 2

L'intérêt de la soustraction en complément à 2 est la possibilité de transformer la soustraction en addition. Par définition le complément à 2 d'un nombre binaire c'est le complément bit à bit de ce nombre +1, le 1 étant rajouté au bit le moins significatif.

$A-B=A+CP_2(B)$,

$$CP_2(B) = \bar{B} + 1$$

$9-10=9+CP_2(10)$

$(10)_{10}=(1010)_2$

$CP_2(10)=$

$$\begin{array}{lccccc} & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & + & & & & \\ & & & & & 1 \\ \hline = & & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{lcccccc} & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & + & & & & \\ & & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline = & \underline{0}\rfloor & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

pas de retenu donc résultat<0

$CP_2(1111)=0000$

$$\begin{array}{lccccc} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & + & & & & \\ & & & & & 1 \\ \hline = & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

4. Exercice

[solution n°6 p.21*]*

Quelle est le résultat de la soustraction en binaire suivante :

10110-10001

Veuillez choisir une réponse :

- 00110
- 00101
- 11101

5. Multiplication

La multiplication en binaire est très simple, voilà la table de multiplication:

0×0=0

0×1=0

1×0=0

1×1=1

Exemple 1 :

6×7=42

```
        1 1 0
      ×
        1 1 1
   ----------
   =    1 1 0
      1 1 0 .
    1 1 0 . .
 ------------
 = 1 0 1 0 1 0
```

Exemple 2 :

10,75×3=32,25

```
      1 0 1 0, 1 1
    ×
               1 1
    --------------
    = 1 0 1 0, 1 1
    1 0 1 0, 1 1 .
 -----------------
 = 1 0 0 0 0 0, 0 1
```

6. Exercice

[solution n°7 p.21*]*

Quelle est le résultat de la multiplication en binaire suivante :

1010*101

Veuillez choisir une réponse :

- ○ 110010
- ○ 110001
- ○ 001101

7. Division

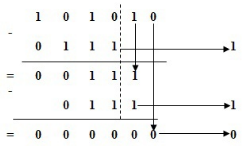
Le principe de la division binaire est semblable à celui de la division décimal, mais en plus simple du fait que chaque quotient partiel est soit égal à 1 (division possible) ou à 0 (division impossible. La division est l'opération inverse de la multiplication, dans le sens où on soustrait de façon répétitive un nombre à un autre jusqu'à ce que cela ne soit plus possible, avec à chaque fois un décalage à droite.

La première étape consiste à soustraire, en partant de la gauche, le diviseur au dividende. Si la soustraction n'est pas possible, le diviseur est décalé d'une position vers la droite, ensuite la soustraction est effectuée. La soustraction suivante a lieu entre le résultat de la soustraction précédente, augmenté à droite du bit suivant du dividende suivant la règle énoncée précédemment . Cette étape est répétée jusqu'à épuisement des bits du dividende. A chaque soustraction, on inscrit 1 au résultat, dans le cas contraire, on met 0.

Exemple1 :

Faire la division suivante :

42/7=6

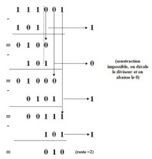


le résultat est donc 110 avec un reste=0 (6 et reste=0)

Exemple2 :

Faire la division suivante :

57/5=11 reste=2



le résultat est donc 1011 avec un reste=010 (11 et reste=2)

8. Exercice

[solution n°8 p.22*]*

Quelle est le résultat de la division en binaire suivante :

1100/011

Veuillez choisir une réponse :

- 110
- 010
- 100

Exercice :

IV

Exercice 1 :

Convertir en décimal les nombres suivants:

$(01001011)_2$, $(1245)_8$, $(3C5)_{16}$, $(1001\ 1000)_{BCD}$.

Exercice 2 :

Convertir en binaire les nombres suivants:

$(1523)_{10}$, $(74)_8$, $(60)_{10}$, $(A94)_{16}$, $(2708)_{10}$,$(124)_7$.

Exercice 3 :

Convertir les nombres décimaux:

$(108)_{10}$ en octal

$(1023)_{10}$ en hexadécimal

$(12{,}524)_{10}$ en binaire

$(51{,}225)_{10}$ en base 7

Exercice 4 :

Effectuer les opérations suivantes en binaire:

$(254+36)_{10}$, $(A049+0AFC)_{16}$, $(104-111)_{10}$, $(255\times127)_{10}$, $(294/14)_{10}$, $(57/5)_{10}$

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 7

Quelle est la valeur décimale qui correspond à la valeur binaire 110001 ?

Veuillez choisir une réponse :

- ○ 87
- ◉ 49
- ○ 32

la valeur décimale qui correspond à la valeur binaire 110001 est : 49

> **Solution** n°2

Exercice p. 9

Quelle est la valeur binaire qui correspond à la valeur décimale 12 ?

Veuillez choisir une réponse :

- ◉ 1100
- ○ 1010
- ○ 0111

la valeur binaire qui correspond à la valeur décimale 12 est : 1100

> **Solution** n°3

Exercice p. 11

Quelle est la valeur binaire qui correspond à la valeur Hexadécimale 8E5?

Veuillez choisir une réponse :

- ○ 1100 1110 0010
- ○ 1111 0101 0101
- ◉ 1000 1110 0101
- ○ 1000 0110 1010

la valeur binaire qui correspond à la valeur Hexadécimale 8E5 est : 1000 1110 0101

> **Solution** n°4

Exercice p. 13

Quelle est la valeur décimale qui correspond à la valeur BCD : 1000 0110 0001?

Veuillez choisir une réponse :

- (x) 861
- ( ) 876
- ( ) 754

la valeur décimale qui correspond à la valeur BCD 1000 0110 001est : 861

> **Solution** n°5

Exercice p. 15

Quelle est le résultat de l'addition en binaire suivante :

11010+01011

Veuillez choisir une réponse :

- ( ) 110011
- ( ) 001011
- (x) 100101

le résultat de l'addition en binaire suivante : 11010+01011 est :

100101

> **Solution** n°6

Exercice p. 16

Quelle est le résultat de la soustraction en binaire suivante :

10110-10001

Veuillez choisir une réponse :

- ( ) 00110
- (x) 00101
- ( ) 11101

le résultat de la soustraction en binaire suivante : 10110-10001 est :

00101

> **Solution** n°7

Exercice p. 17

Quelle est le résultat de la multiplication en binaire suivante :

1010*101

Veuillez choisir une réponse :

- (•) 110010
- ( ) 110001
- ( ) 001101

le résultat de la multiplication en binaire suivante : 1010*101 est :

110010

> **Solution** n°8

Exercice p. 18

Quelle est le résultat de la division en binaire suivante :

1100/011

Veuillez choisir une réponse :

- ( ) 110
- ( ) 010
- (•) 100

le résultat de la division en binaire suivante : 1100/011 est :

100

Bibliographie

Y. Granjon, B. Estibals, S. Weber, Electronique : tout le cours en fiches, IUT, Licence, Ecoles d'Ingénieurs, DUNOD,Paris, 2015

P. Horowitz, W. Hill, Traité de l'électronique analogique et numérique - Volume 2, Publitronic - Elektor, 1997

T. Ndjountche, Electronique numérique 1 : Circuits logiques combinatoires, ISTE editions, 2016

N. Mansouri, "Les Systèmes Logiques", Tome 1, EUMC